УДК 621.372

Идеально согласованные слои в методе конечных разностей во временной области

А.Д. Григорьев[1], Р.В. Салимов[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
[2]LG Elecrtonics lab

Аннотация: в работе рассматриваются алгоритмы создания идеально согласованных слоев (ИСС) для ограничения расчетной области при использовании для моделирования электромагнитного поля метода конечных разностей во временной области. Разработан алгоритм, совместимый с основным алгоритмом КРВО и выбраны его оптимальные параметры. Приводятся результаты тестирования алгоритма.

Ключевые слова: вычислительная электродинамика, метод конечных разностей, идеально согласованный слой.

1. Введение

Широко используемые в коммерческих программах объемные методы моделирования высокочастотного электромагнитного поля – метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечного интегрирования предполагают разбиение расчетной области на множество подобластей простой формы. Поскольку количество таких областей должно быть конечным, при решении внешних задач электродинамики (например, расчете антенн) расчетную область приходится искусственно ограничивать, причем эта граница должна имитировать внешнее пространство, т. е. она не должна отражать падающее на нее излучение.

Существует два подхода к созданию такой граничной поверхности. Первый основан на задании на поверхности так называемых абсорбционных граничных условий (АГУ), которые делают эту поверхность не отражающей [1]. В действительности АГУ только приближенно моделируют неотражающую поверхность. В зависимости от порядка аппроксимации и угла падения излучения коэффициент отражения от поверхности с АГУ может достигать -20…-15 Дб, что во многих случаях неприемлемо.

Другой способ состоит в создании так называемого идеально согласованного слоя (ИСС), расположенного непосредственно за границей расчетной области. Такой слой толщиной в несколько подобластей, должен поглощать всю энергию падающего на него излучения и ничего не отражать обратно. Впервые идею создания такого слоя высказал Беранже [2], [3]. Такой подход позволил значительно уменьшить коэффициент отражения от ИСС. Разработанный им алгоритм включал разбиение каждой проекции электрического и магнитного полей на две составляющие. В результате число уравнений, которые необходимо решить, удваивалось, что усложняло алгоритм и увеличивало требования к необходимым вычислительным ресурсам. В дальнейшем были предложены альтернативные формулировки ИСС, основанные на преобразовании пространственных координат [3], [4] или введении анизотропной поглощающей среды [5], [6]. Последняя формулировка позволяет использовать для вычислений стандартные уравнения Максвелла, что позволяет совместить вычисления в расчетной области и в ИСС в одном алгоритме.

Предложенный в работах [5], [6] алгоритм моделирования ИСС требует значительных вычислительных ресурсов и включает ряд параметров искусственной среды, оптимальные значения которых зависят от решаемой задачи. В настоящей работе представлен модифицированный алгоритм создания ИСС, позволяющий экономить вычислительные ресурсы и оптимизированы параметры этого алгоритма.

2. Анизотропный идеально согласованный слой

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z декартовой системы координат. Ее электромагнитное поле определяется выражениями

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz};\quad \mathbf{H}(z,t)=\mathbf{H}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0$ – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля, $k=k'-\mathrm{i}k''$ – волновое число. В идеально согласованном слое постоянная затухания k'' должна быть больше нуля, а отражения отсутствовать, для чего ИСС должен быть согласован со средой, заполняющей расчетную область (как правило, это вакуум). Условия согласования требуют равенства характеристических сопротивлений сред:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{\overline{\overline{\mu}}}{\overline{\overline{\varepsilon}}}}\ \text{или}\ \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}}{\varepsilon_0}=\frac{\overline{\overline{\mu}}}{\mu_0}. \tag{2}$$

В этом выражении ε_0,μ_0 –- диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в расчетной области, прилежащей к ИСС (предполагается вакуум), $\overline{\overline{\varepsilon}},\overline{\overline{\mu}}$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости ИСС. В методе анизотропного ИСС его диэлектрическую и магнитную проницаемости предлагается считать диагональными тензорами:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\varepsilon_0\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=\varepsilon_0\overline{\overline{\mathbf{P}}}_\varepsilon;\quad \overline{\overline{\mu}}=\mu_0\begin{vmatrix} d & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & f_r\end{vmatrix}=\mu_0\overline{\overline{\mathbf{P}}}_\mu. \tag{3}$$

Из выражения (2) следует, что $\overline{\overline{\mathbf{P}}}_\varepsilon=\overline{\overline{\mathbf{P}}}_\mu=\overline{\overline{\mathbf{P}}}$. Более того, считая среду ИСС одноосной, ось которой совпадает с направлением распространения волны, получим, что $a=b$.

Соотношение (2) обеспечивает отсутствие отражений при нормальном падении волны на поверхность ИСС. Можно показать, что отсутствие отражений при произвольном угле падения обеспечивается, если принять $c=1/a$. Таким образом, ИСС характеризуется одним комплексным параметром $a=\beta-\mathrm{i}\alpha$. Удобно положить

$$a=\left(1+\frac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0}\right). \tag{4}$$

В этом выражении σ – электропроводность среды. Следовательно, относительные проницаемости ИСС

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_r=\overline{\overline{\mu}}_r=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0} & 0 & 0\\ 0 & 1+\dfrac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0}}\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Запишем уравнения Максвелла для ИСС в частотной области:

$$\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}\mathbf{E}=\nabla\times\mathbf{H};\qquad(6)$$

$$\mathrm{i}\,\omega\mu_0\bar{\bar{\mu}}\mathbf{H}=-\nabla\times\mathbf{E}.\qquad(7)$$

Проекция уравнения (6) на ось x имеет вид

$$\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0\left(1+\frac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0}\right)E_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}.\qquad(8)$$

или

$$\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0E_x+\sigma E_x=\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right).$$

Для перехода во временную область нужно заменить $\mathrm{i}\,\omega$ на $\partial/\partial t$. Заменив затем производные центральными конечными разностями с шагами по координатам h_x,h_y,h_z и шагом по времени h_t, получим после ряда преобразований конечно-разностную формулу

$$\begin{aligned}E_x^{m+1}(i+1/2,j,k)&=\frac{\varepsilon_0/h_t-\sigma/2}{\varepsilon_0/h_t+\sigma/2}E_x^{m}(i+1/2,j,k)+\frac{1}{\varepsilon_0/h_t+\sigma/2}\times\\&\times\left[\frac{H_z^{m+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)-H_z^{m+1/2}(i+1/2,j-1/2,k)}{h_y}-\right.\\&\left.-\frac{H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)-H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k-1/2)}{h_z}\right].\end{aligned}\qquad(9)$$

В этой формуле использованы обозначения $E_x^m(i,j,k)=E_x(ih_x,jh_y,kh_z,mh_t)$. Шаг по времени должен удовлетворять условию стабильности Куранта

$$h_t=\frac{\alpha\xi_xh_x}{v_{\max}},\qquad(10)$$

где $\alpha=0.95...0.98$ – параметр устойчивости, $\xi_x=1/\sqrt{1+\nu_y^2+\nu_z^2}$, $\xi_y=\nu_y\xi_x$, $\xi_z=\nu_z\xi_x$, $\nu_x=1,\nu_y=h_x/h_y,\nu_z=h_x/h_z$, $v_{\max}$ – максимальная скорость волны в ИСС. Как показано в [6], в данной реализации ИСС $v_{\max}=c$. С учетом этих обозначений уравнение (9) можно переписать:

$$\begin{aligned}E_x^{m+1}(i+1/2,j,k)&=\frac{1-\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2}{1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2}E_x^{m}(i+1/2,j,k)+\frac{\alpha\xi_xZ_0}{1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2}\times\\&\times\left\{\nu_y\left[H_z^{m+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)-H_z^{m+1/2}(i+1/2,j-1/2,k)\right]-\right.\\&\left.-\nu_z\left[H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)-H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k-1/2)\right]\right\}.\end{aligned}\qquad(11)$$

В этом уравнении $\bar{\sigma}=\sigma Z_0h_x$ – нормированная удельная проводимость, $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – характеристическое сопротивление свободного пространства. Как видно, это обычное конечно-разностное уравнение.

Аналогичное уравнение можно записать и для обновления компопненты E_y:

$$
\begin{aligned}
E_y^{m+1}(i,j+1/2,k) &= \frac{1-\alpha\xi_y\bar{\sigma}/2}{1+\alpha\xi_y\bar{\sigma}/2}E_x^m(i,j+1/2,k)+\frac{\alpha\xi_y Z_0}{1+\alpha\xi_y\bar{\sigma}/2}\times \\
&\times\left\{\nu_z\left[H_x^{m+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)-H_z^{m+1/2}(i,j+1/2,k-1/2)\right]-\right. \\
&\left.-\nu_x\left[H_z^{m+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)-H_y^{m+1/2}(i-1/2,j+1/2,k)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Однако, для продольной компоненты электрического поля из (6) получается другое уравнение, которое невозможно непосредственно преобразовать во временную область. В [6] предлагается это преобразование выполнить в 2 эпапа. Сначала уравнение (6) записывается относительно вектора электрической индукции $\mathbf{D}$:

$$
\mathrm{i}\,\omega\mathbf{D}=\nabla\times\mathbf{H}.
$$

Это уравнение легко преобразуется в конечно-разностную форму для продольной компоненты вектора электрической индукции:

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}_z^{m+1}(i,j,k+1/2)=\bar{D}_z^m(i,j,k+1/2)+\alpha\xi_x Z_0\times \\
&\times\left\{H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)-H_y^{m+1/2}(i-1/2,j,k+1/2)-\right. \\
&\left.\nu_y\left[H_x^{m+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)-H_x^{m+1/2}(i,j-1/2,k+1/2)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь $\bar{D}_z=D_z/\varepsilon_0$ – нормированная индукция,

Следующий шаг – вычисление напряженности электрического поля. Для этого воспользуемся формулой

$$
\bar{D}_z=\left(1+\frac{\sigma}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_0}\right)^{-1}E_z.
$$

Проделав несложные преобразования и заменив $\mathrm{i}\,\omega$ на $\partial/\partial t$, получим

$$
\begin{aligned}
&E_z^{m+1}(i,j,k+1/2)=E_z^m(i,j,k+1/2)+ \\
&+\left(1+\alpha\xi_z\bar{\sigma}/2\right)\bar{D}_z^{m+1}(i,j,k+1/2)-\left(1-\alpha\xi_z\bar{\sigma}/2\right)\bar{D}_z^m(i,j,k+1/2)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Аналогичные формулы имеют место и для обновления напряженности магнитного поля:

$$
\begin{aligned}
&H_x^{m+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)=\frac{1-\alpha\xi_x\bar{\sigma}}{1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}}H_x^{m-1/2}(i,j+1/2,k+1/2)- \\
&-\frac{\alpha\xi_x}{Z_0(1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2)}\left\{\nu_z\left[E_z^m(i,j+1,k+1/2)-E_z^m(i,j,k+1/2)\right]-\right. \\
&\left.-\nu_z\left[E_y^m(i,j+1/2,k+1)-E_y^m(i,j+1/2,k)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_y^{m+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)=\frac{1-\alpha\xi_x\bar{\sigma}}{1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}}H_y^{m-1/2}(i+1/2,j,k+1/2)- \\
&-\frac{\alpha\xi_x}{Z_0(1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2)}\left\{\nu_z\left[E_x^m(i+1/2,j,k+1)-E_z^m(i+1/2,j,k)\right]-\right. \\
&\left.-\nu_x\left[E_z^m(i+1,j,k+1/2)-E_y^m(i,j,k+1/2)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Для продольной составляющей магнитного поля необходимо использовать двухступенчатый алгоритм. На первом этапе обновляем магнитную индукцию:

$$\bar{B}_z^{m+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = \bar{B}_z^{m-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) -$$
$$-\frac{\alpha\xi_x}{Z_0}\Big\{\Big[E_y^m(i+1, j+1/2, k) - E_y^m(i, j+1/2, k)\Big] - \tag{17}$$
$$-\nu_y\Big[E_x^m(i+1/2, j+1, k) - E_x^m(i+1/2, j, k)\Big]\Big\}.$$

На втором этапе находим напряженность магнитного поля.

$$H_z^{m+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = H_z^{m-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) +$$
$$+\Big[\big(1+\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2\big)B_z^{m+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - \big(1-\alpha\xi_x\bar{\sigma}/2\big)B_z^{m-1/2}(i+1/2, j+1/2, k)\Big].$$

4. Выбор значения проводимостей

Для уменьшения отражений проводимость должна плавно увеличиваться по мере проникновения волны вглубь ИСС. Обычно используется степенной закон изменения проводимости. Так, для ИСС, расположенной в плоскости yOz

$$\sigma(x) = \sigma_{\max}\left(\frac{|x-x_0|}{d}\right)^m, \tag{18}$$

где x_0 – положение границы ИСС, d – толщина слоя ИСС, m – показатель степени. Численные эксперименты показывают, что наилучшие результаты получаются для $m=4$. Максимальное значение проводимости определяется по эмпирической формуле [6]

$$\sigma_{\max} \approx \frac{m+1}{Sh_i}, \tag{19}$$

где h_i – пространственный шаг ИСС в данном направлении в миллиметрах, S – параметр, который подбирается экспериментально.

Заключение

Представлен алгоритм имплементации идеально согласованного слоя в метод конечных разностей во временной области. Алгоритм не требует модификации уравнений Максвелла и поэтому легко встраивается в стандартный метод КРВО.

Список литературы

1. Григорьев, А.Д. методы вычислительной электродинамики. – М.: Физматлит, 2012. – 430 с.
2. Berenger, J.P. A perfectly matched layer for the absorbtion of electromagnetic waves // J. comp. Phys. – 1994, – V. 114, No. 2, – pp. 185-200.
3. Berenger J.P. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. // J. comp. Phys. – 1996, – V. 127, No. 2, – pp. 363-379.
4. Jin, J. The finite element method in electromagnetics. – 2-nd edition. – N.-Y. – John Wiley & Sons Inc., 2002. – 752 p.
5. Sacks, Z.S., Kingsland, D.M., Lee, R, Lee, J.-F. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an Absorbing boundary condition // IEEE Trans on AP. – 1995, – V. 43. – No. 12. – pp. 1460-1463.
6. Gedney, S.D. An anisotropic perfectly matched layer absorbing medium for the truncation od FDTD lattices // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1996. – V. 44. – No. 12. – pp. 1630-1639.